

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIAHS

Espaces euclidiens

Contrôle continu, le 14 octobre 2025, 13h30–14h00
CORRIGE et BAREME/10

Exercice 1. a. On calcule

$$\begin{aligned} \det(A - XI) &= \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 6 & -X & -4 \\ 0 & 2 & 3-X \end{vmatrix} \stackrel{L'_3=L_3-2L_1}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 6 & -X & -4 \\ -2(3-X) & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (3-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ 6 & -X & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{L''_2=L'_2+4L'_3}{=} \\ &= (3-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -2 & -X & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-X) \begin{vmatrix} 3-X & 1 \\ -2 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-3X+2) = \\ &= (3-X)(X-1)(X-2). \quad \textbf{(2 pts)} \end{aligned}$$

b. Les valeurs propres de A sont donc 1, 2, 3. **(1 pt)**

c. Comme la matrice 3×3 A possède 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. **(1 pt)**

d. On détermine un vecteur propre pour chaque valeur propre de A :

$\lambda = 1$: On cherche une solution non triviale de l'équation vectorielle $Av = v$. Avec $v = (x, y, z)$, cela revient à déterminer une solution non triviale du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + y = x \\ 6x - 4z = y \\ 2y + 3z = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 6x - y - 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \stackrel{L'_2=L_2-3L_1}{\Leftrightarrow} \\ \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}z \\ y = -z \end{cases}. \end{aligned}$$

On obtient une solution non triviale agréable en prenant $z = 2$, et donc $y = -2$ et $x = 1$. Un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 est donc

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(2 pts)}$$

$\lambda = 2$: On cherche une solution non triviale de l'équation vectorielle $Av = 2v$. Avec $v = (x, y, z)$, cela revient à déterminer une solution non triviale du

système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x & +y & & = 2x \\ 6x & & -4z & = 2y \\ & 2y & +3z & = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & & = 0 \\ 6x & -2y & -4z & = 0 \\ & 2y & +z & = 0 \end{cases} \quad L'_2 = L_2 - 6L_1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x & +y & & = 0 \\ & -8y & -4z & = 0 \\ & 2y & +z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & & = 0 \\ & 2y & +z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -y \\ z & = -2y \end{cases}.$$

On obtient une solution non triviale en prenant $y = 1$, et donc $x = -1$ et $z = -2$. Un vecteur propre de A pour la valeur propre 2 est donc

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pts})$$

$\lambda = 3$: On cherche une solution non triviale de l'équation vectorielle $Av = 3v$. Avec $v = (x, y, z)$, cela revient à déterminer une solution non triviale du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x & +y & & = 3x \\ 6x & & -4z & = 3y \\ & 2y & +3z & = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & +y & & = 0 \\ 6x & -3y & -4z & = 0 \\ & 2y & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ 3x & = 2z \end{cases}.$$

On obtient une solution non triviale agréable en prenant $z = 3$, et donc $x = 2$ et $y = 0$. Un vecteur propre de A pour la valeur propre 3 est donc

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pts})$$

On pose

$$P = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours, P est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonale.